

独立成分分析における センサー位置の最適化

第2回 Latent Dynamics Workshop

東京工業大学大学院 情報理工学研究科

数理・計算科学専攻

修士2年 三根 宏太

下平 英寿

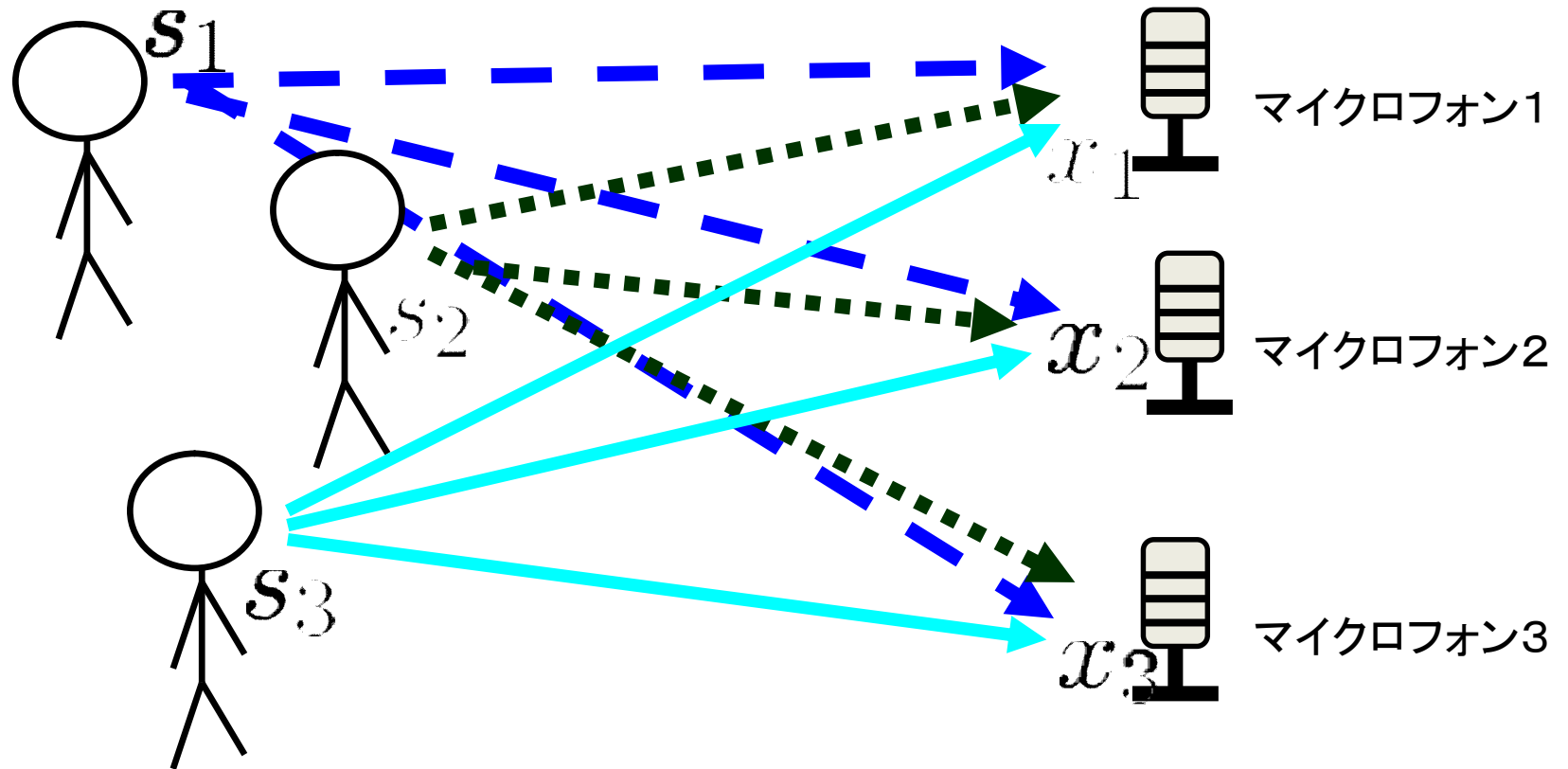
目次

- 独立成分分析(ICA)の紹介
- 研究の動機と問題設定
- 最適化の目的関数とその展開
- 数値実験の結果

カクテルパーティー問題

会話
(独立な音声信号)

マイクフォンに録音された音声から、
それぞれの人の音声を復元するのがICA



独立成分分析 (ICA)

観測信号

$$x(t) = A s(t)$$

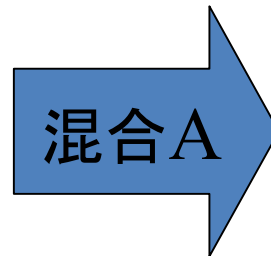
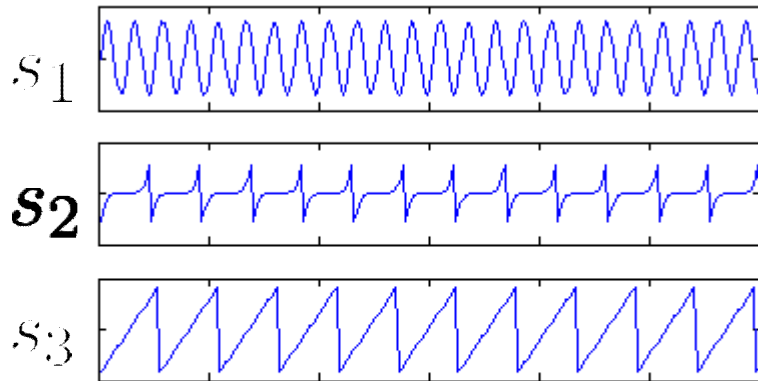
\mathbf{X} : 観測信号, \mathbf{S} : 原信号, \mathbf{A} : 混合行列

原信号と観測信号の個数は同じとする

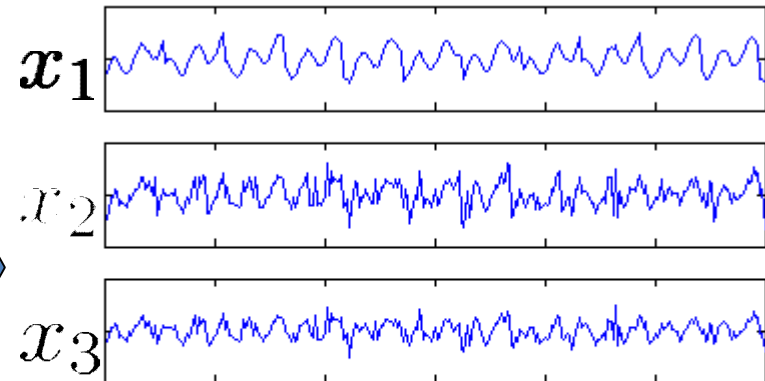
※時間遅れを考慮する場合もある

$$x(t) = A s(t-h)$$

原信号 \mathbf{S}



観測信号 \mathbf{X}



独立成分分析 (ICA)

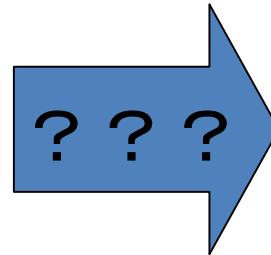
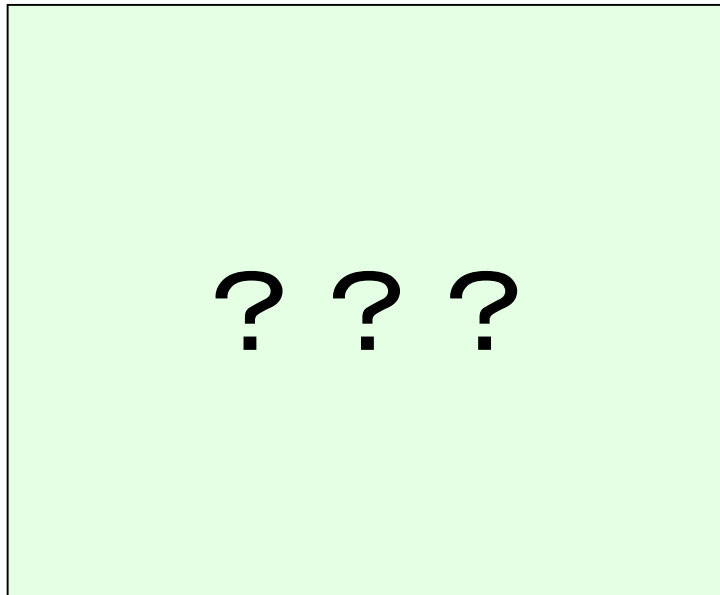
観測信号

$$x(t) = As(t)$$

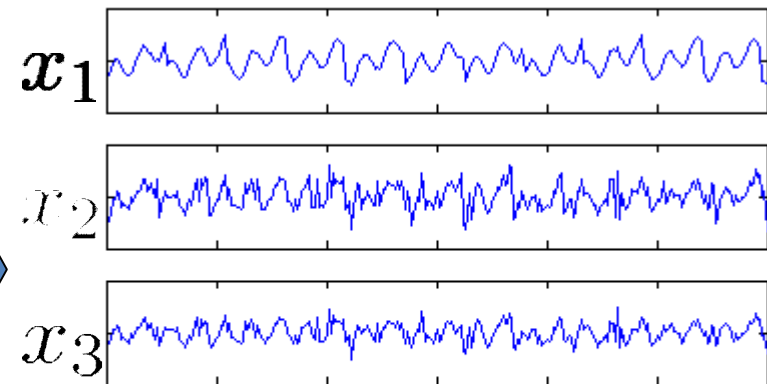
X : 観測信号, S : 原信号, A : 混合行列

原信号 S が、
互いに独立である
という情報以外は知らない

原信号 S



観測信号 X



独立成分分析 (ICA)

W : 復元行列

観測信号

$$x(t) = As(t)$$

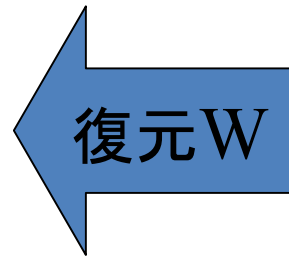
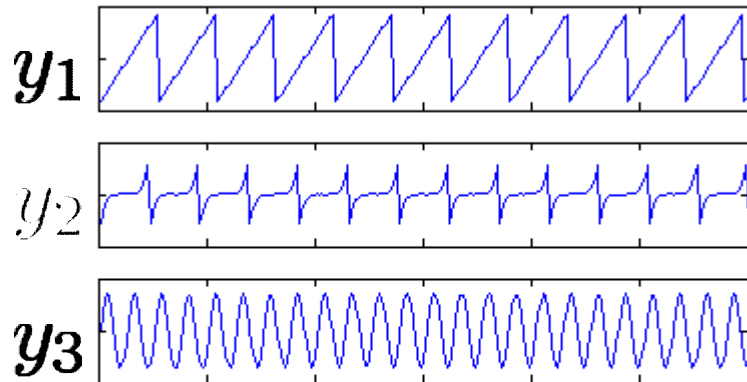
X : 観測信号, S : 原信号, A : 混合行列

復元信号

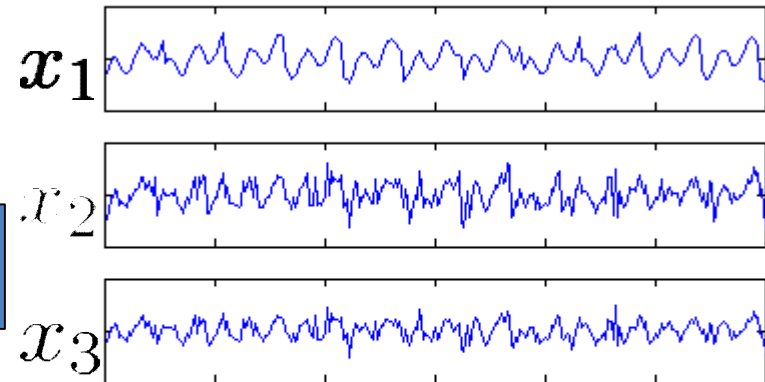
$$y(t) = Wx(t)$$

復元信号の独立性を最大にするように信号を復元する

復元信号 Y



観測信号 X



W を見つける問題になる.

ICAの不定性

- ICAには不定性があることに注意が必要

順序(ラベル付け)の不定性

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

上の2式を区別はできない

(復元した信号のラベル付け
の不定性)

スケール、符号の不定性

$$x = As$$

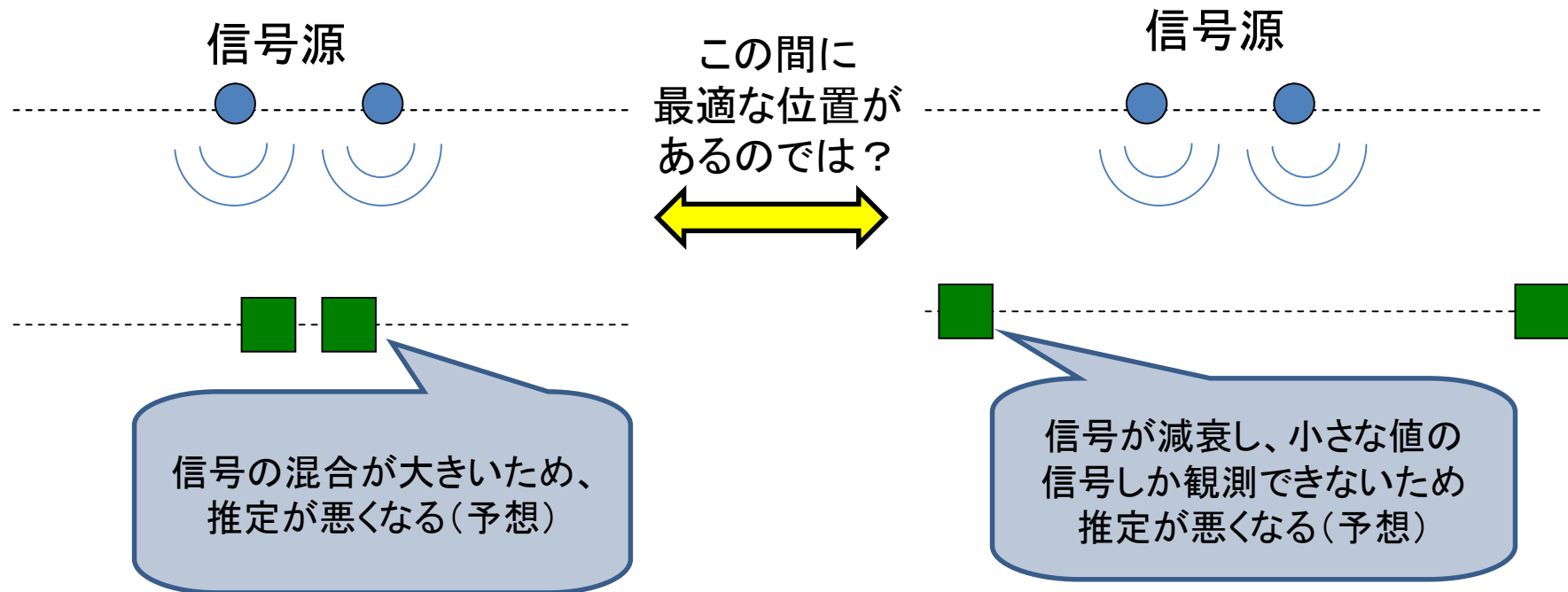
$$x = (\alpha A) \left(\frac{1}{\alpha} s \right)$$

上の2式を区別はできない

α は負の値もとりうる

研究の動機

- 信号が伝達距離によって減衰すると仮定すれば、元の信号を精度よく復元するのに最適なセンサーの位置があるのではないだろうか？
→ 数理的に示すことができるか？
- センサーの位置が、信号源の位置から近すぎても、遠すぎても精度が悪くなるのでは？ → その中間に最も精度が良くなる位置があるのでは？



最終的に扱ってみたい問題

● 信号源 : 球の内部にある

ともに3次元極座標で位置を表す

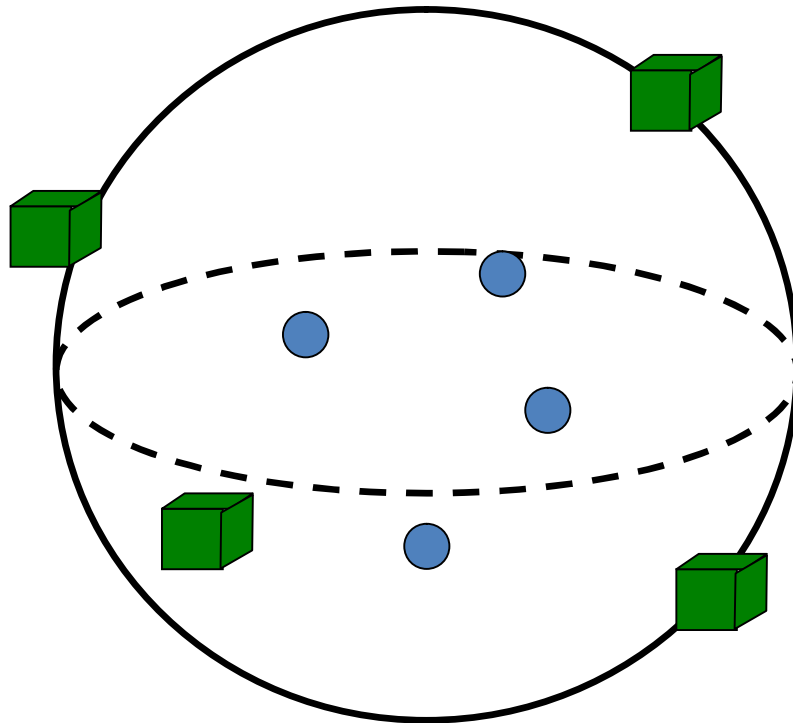
■ センサー : 球の表面上に配置

センサー位置を最適化する手順

①. センサーの位置をある位置に配置

②. 1で観測した信号および信号源に関する事前情報を用いてセンサーを最適な位置に移動する

- この問題を扱う前にまずは簡略化した問題を扱う



扱う問題の設定

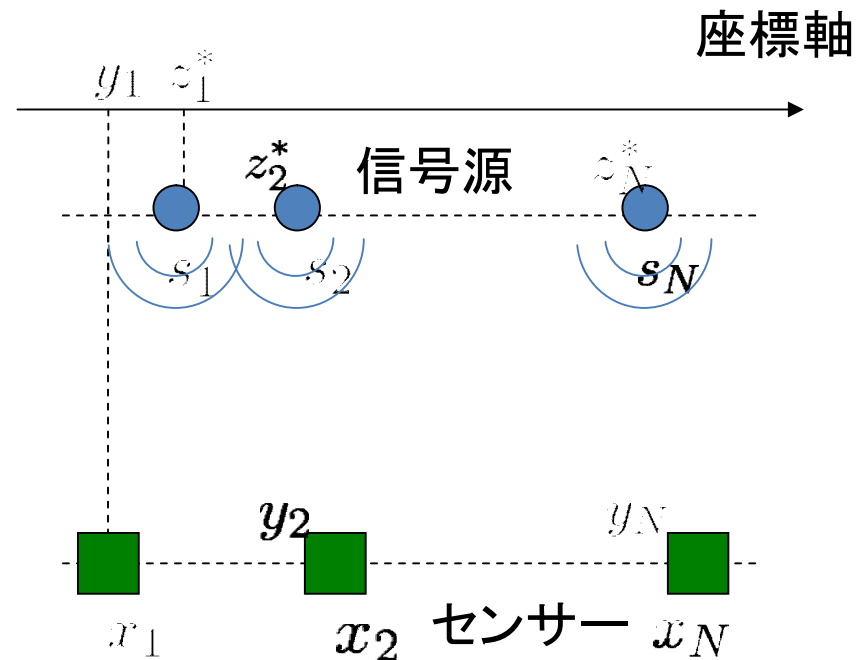
- とりあえず簡単のため、以下の設定で扱う

1. 原信号について

- 原信号の従う分布 $s_i \sim p_i(s_i; 0, \sigma_i^2)$
- 互いに独立

2. 混合行列について

- 信号源の位置 $z_1^* < z_2^* < \dots < z_N^*$
- センサーの位置 $y_1 < y_2 < \dots < y_N$
- 混合行列は信号源とセンサーの位置に依存する



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y_1, z_1^*) & f(y_1, z_2^*) & \dots & f(y_1, z_N^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(y_N, z_1^*) & f(y_N, z_2^*) & \dots & f(y_N, z_N^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

\mathbf{X} 真の混合行列 \mathbf{A}^* \mathbf{S}

扱う問題の設定

3. 観測データについて

- 観測データ $\mathbf{x}(t) = A^* \mathbf{s}(t)$, $t = 1, \dots, T$

4. 信号復元の方法

- 観測信号の白色化を行う

$$\tilde{\mathbf{x}} = V \mathbf{x} = V A^* \mathbf{s} = V A^* P \tilde{\mathbf{s}} = \tilde{A}^* \tilde{\mathbf{s}}$$

ここに $\tilde{\mathbf{x}}$ および $\tilde{\mathbf{s}}$ はともに分散1に規格化したもの

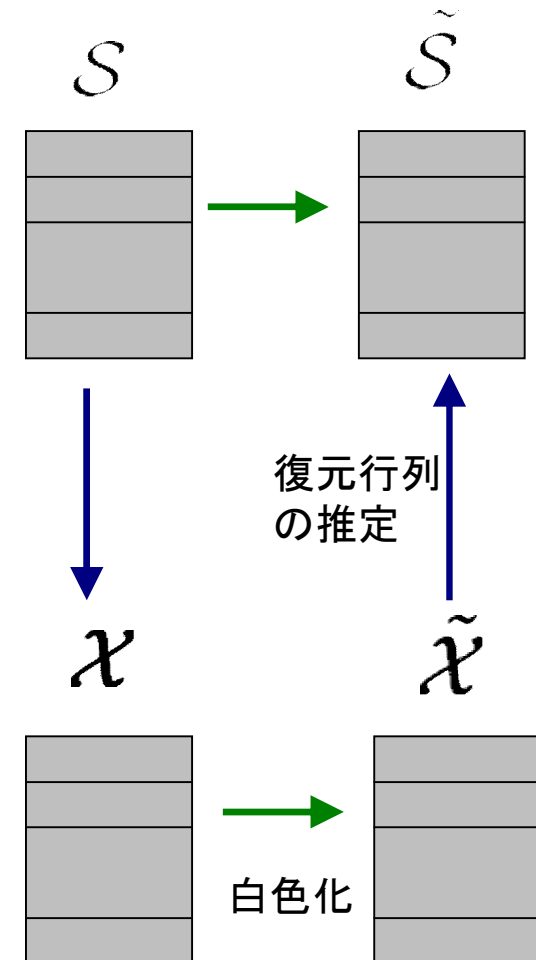
行列 V は固有値展開などを用いて得られる

行列 \tilde{A}^* は直交行列である

- 上の式より、

$$\tilde{\mathbf{s}} = W^* \tilde{\mathbf{x}}$$

この復元行列(直交行列)をICAで推定する



扱う問題の設定

4. 信号復元の方法

- 復元行列 W を次で推定, ただし直交行列に限る

$$\hat{W} = \arg \min_W \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \log \tilde{p}_i(\mathbf{w}_i \tilde{\mathbf{x}}(t)) + \log |\det W|$$

\mathbf{w}_i は行列
 W の第 i 行

W が直交行列のため \circ

- これにより原信号を分散1に規格化したものは、次で推定できる

$$\hat{\tilde{\mathbf{s}}} = \hat{W} \tilde{\mathbf{x}}$$

なお混合行列が $\hat{A} = V^{-1} \hat{W}^{-1} P^{-1}$

で推定できるため、ここから信号源の位置の推定が可能

→ 推定した W の推定値の行を正しく並び替えることが可能

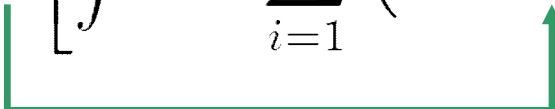
→ 理論上は W の順序を正しく推定できているものとして取り扱ってよい

目的関数の設定

- ① センサー位置 y を固定する
あるデータセット S が与えられたときの予測誤差

$$\int \tilde{p}(\tilde{\mathbf{s}}) \sum_{i=1}^N \left(\tilde{s}_i - \hat{s}_i \right)^2 d\tilde{\mathbf{s}} = \int \tilde{p}(\tilde{\mathbf{s}}) \sum_{i=1}^N \left(\tilde{s}_i - \hat{\mathbf{w}}_i \tilde{A}^* \tilde{s}_i \right)^2 d\tilde{\mathbf{s}}$$

- ② センサーの位置 y を固定したまま、全ての取りうるデータセットの組について①を計算した時の期待値をとる

$$E_S \left[\int \tilde{p}(\tilde{\mathbf{s}}) \sum_{i=1}^N \left(\tilde{s}_i - \hat{\mathbf{w}}_i \tilde{A}^* \tilde{s}_i \right)^2 d\tilde{\mathbf{s}} \right]$$


- ③ センサーの位置を変化させて②を計算した時、②が最も小さくなるセンサーの位置が好ましい位置である。

目的関数の展開

- 目的関数を信号源の真の復元行列の値のまわりでテーラー展開をする
- パラメータを $\theta = (\hat{\mathbf{w}}_1, \dots, \hat{\mathbf{w}}_N)'$ とする
- 目的関数②の $E_S[\]$ の中身の式を $F(\hat{\theta})$ とおく

$$F(\hat{\theta}) = \underbrace{F(\theta^*)}_0 + (\hat{\theta} - \theta^*)' \underbrace{\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} F(\hat{\theta}) \Big|_{\theta^*}}_0 + (\hat{\theta} - \theta^*)' \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}'} F(\hat{\theta}) \Big|_{\theta^*} (\hat{\theta} - \theta^*) + \dots$$

ここで、

$$(\hat{\theta} - \theta^*)' \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}'} F(\hat{\theta}) \Big|_{\theta^*} (\hat{\theta} - \theta^*) = \sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i^*)' \frac{\partial^2}{\partial \hat{\mathbf{w}}_i \partial \hat{\mathbf{w}}_i'} F(\hat{\theta}) \Big|_{\theta^*} (\hat{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i^*)$$

目的関数の展開

- よって目的関数②は次の式で近似される

$$\begin{aligned} E_S \left[Tr \left[\sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i^*)' \frac{\partial^2}{\partial \hat{\mathbf{w}}_i \partial \hat{\mathbf{w}}_i'} F(\hat{\theta}) \Big|_{\theta^*} (\hat{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i^*) \right] \right] \\ = \sum_{i=1}^N Tr \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{\mathbf{w}}_i \partial \hat{\mathbf{w}}_i'} F(\hat{\theta}) \Big|_{\theta^*} E_S [(\hat{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i^*)(\hat{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i^*)'] \right] \end{aligned}$$

- 上の式の w_i の漸近分散を評価し、 $s \rightarrow x$ の変数変換を行い、期待値をデータの平均で置き換えることで、規準値が得られる(計算中)

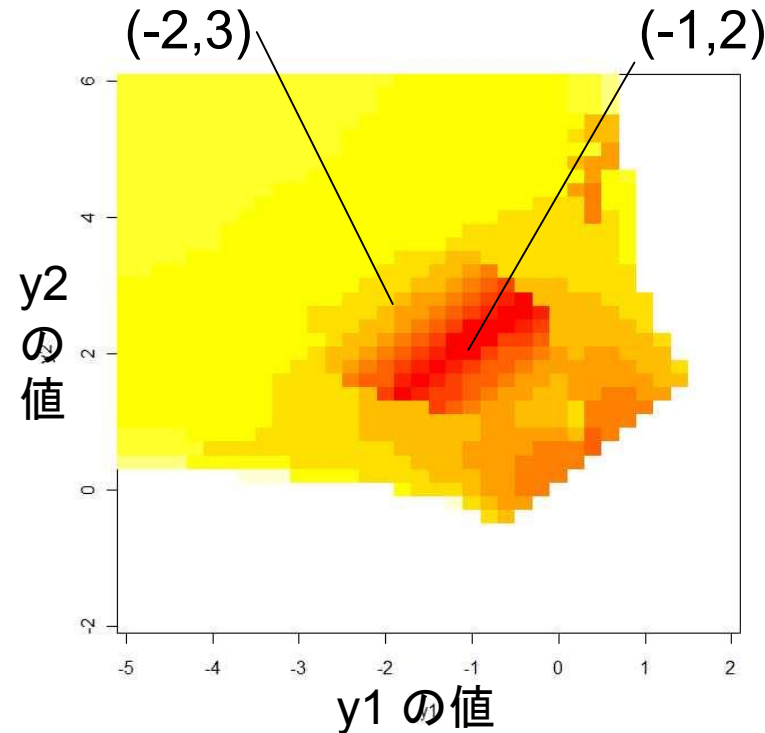
数値実験 $(y_1, y_2) = (-1, 2)$ が最適となった

- 最適解が「自明な解」になってしまうと、問題として妥当とはいえない。
- $N=2$, $T=1000$, $z^* = (0, 1)$
 $f(y, z) = \frac{1}{1 + (y - z)^2}$
- 乱数の種を変えて100回のシミュレーションを行い、データに対する推定の誤差の平均を図示した。

色が濃いほど誤差が小さい



- $(-1, 2)$ 付近が最適という結果



最適な位置

$$z_1^* = 0$$

$$z_2^* = 1$$

$$y_1 = -1$$

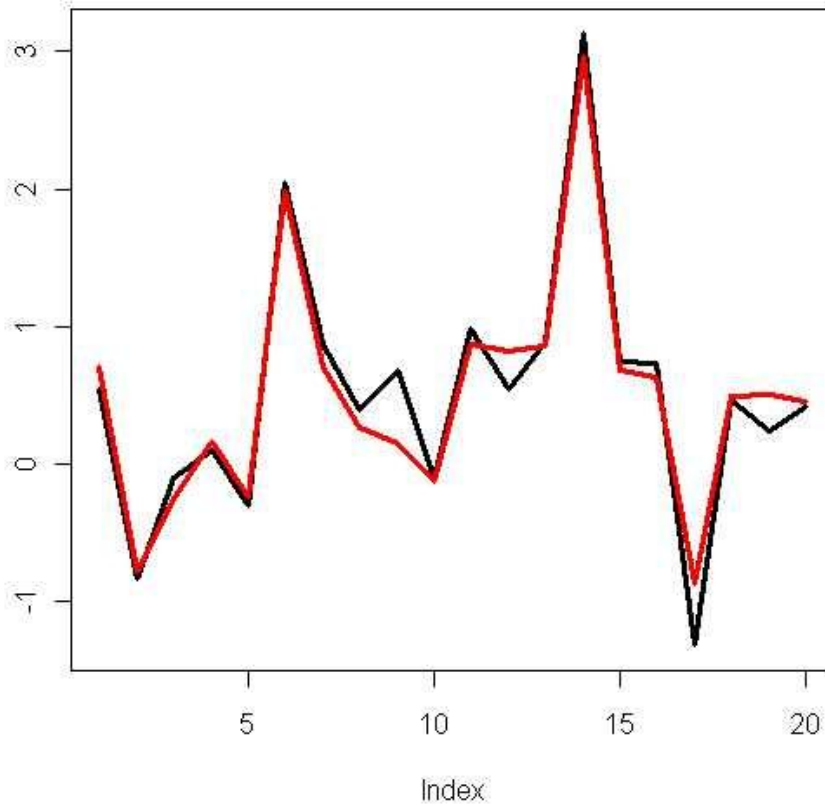
$$y_2 = 2$$

数値実験：信号復元の様子

前々頁の2点について、シミュレーション1回分の信号 s_1 の復元の様子 : 最初の20期
黒: 真の原信号 vs 赤: 復元信号

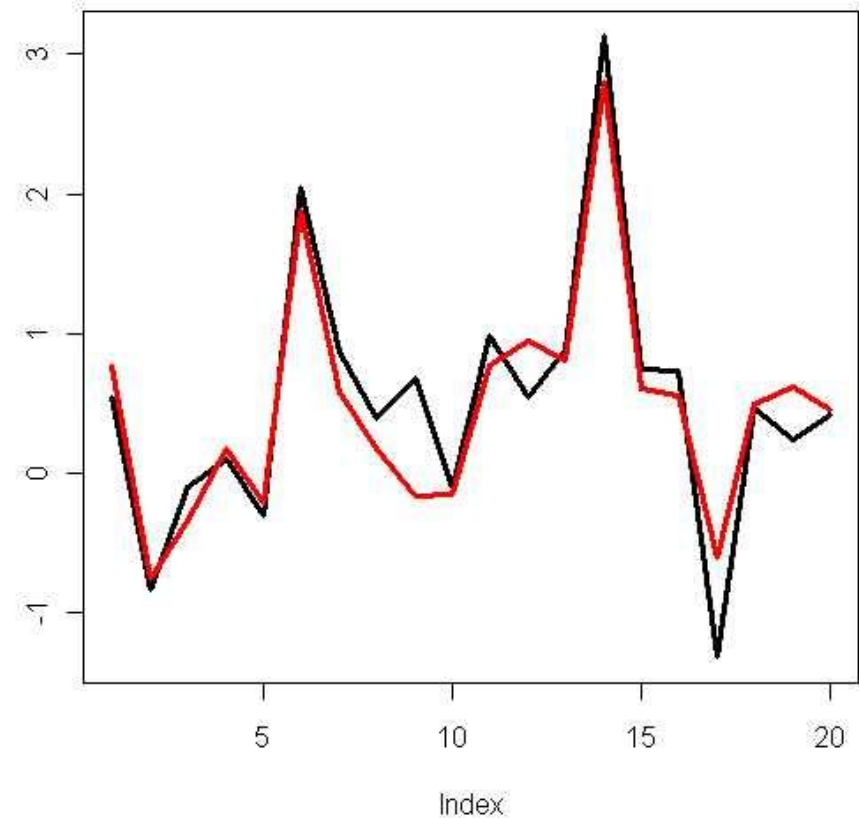
$$(y_1, y_2) = (-1, 2)$$

: 予測二乗誤差70.1 (1000期)



$$(y_1, y_2) = (-2, 3)$$

: 予測二乗誤差169.5 (1000期)



数値実験：信号復元の様子

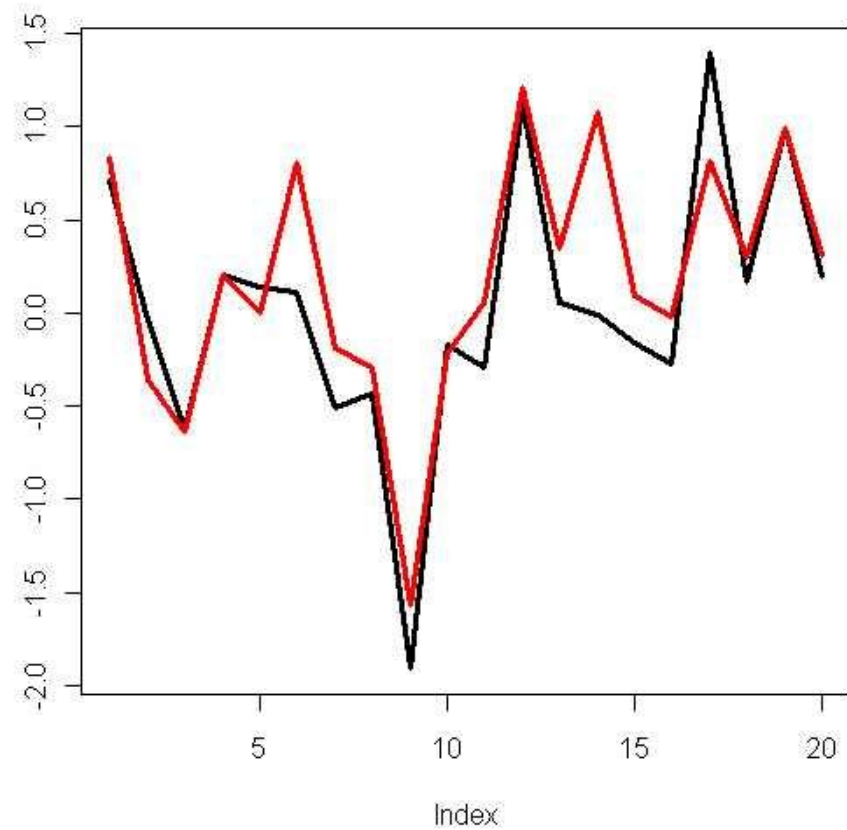
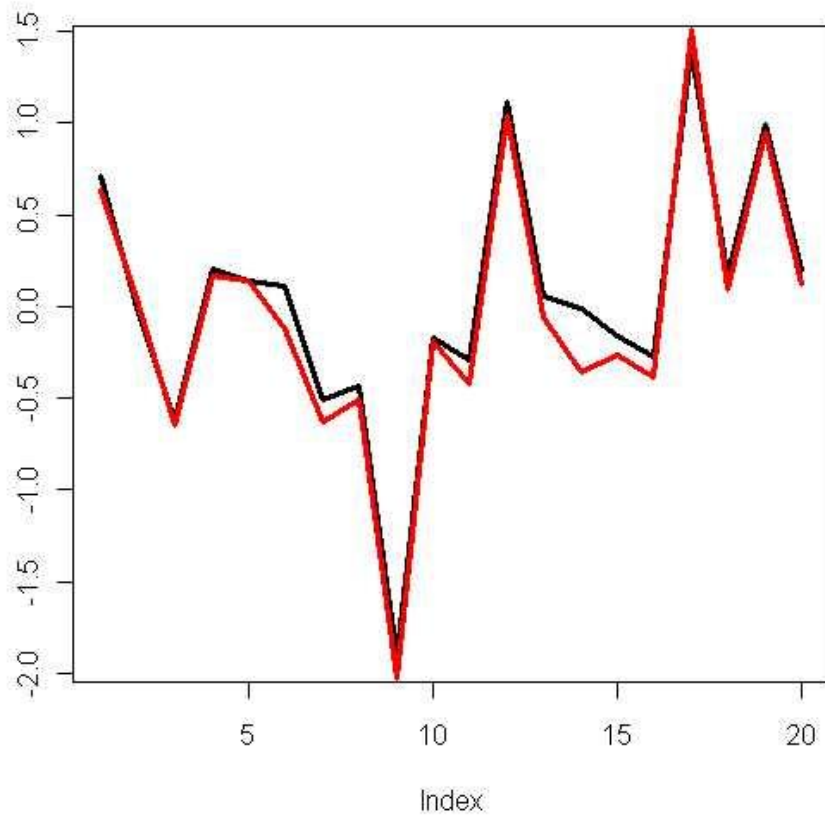
前々頁の2点について、シミュレーション1回分の信号復元の様子 :最初の20期
黒破線:真の原信号 vs 赤実線:復元信号

$$(y_1, y_2) = (-1, 2)$$

:予測二乗誤差11.2 (1000期)

$$(y_1, y_2) = (-2, 3)$$

:予測二乗誤差131.2 (1000期)



まとめと今後の課題

1. まとめ

- ICAにおけるセンサー位置の最適化(能動学習)の問題を考えた
- センサーの位置によって、推定の良し悪しが変わる、かつ、最適な位置は自明ではないことを確認した
- ICAでセンサーの位置の最適化を図る問題設定の妥当性が得られた
- 目的関数を設定し、展開を行った

2. 今後の課題

- 復元行列の推定値の漸近分散の評価を行い、規準値を導き、数値実験を行う

参考文献

- [1] 「入門 独立成分分析」村田昇
- [2] Kanamori,T , Pool-based active learning with optimal sampling distribution and its information geometrical interpretation ,Neurocomputing 71 (2007) 353–362
- [3] Amari,S.,T.Chen and A.Cichocki , Stability analysis of learning algorithms for blind source separation ,Neural Networks 10,1345-1351 (1997)